

## 28 三角関数 1

239

(1)

与式左辺を変形すると,

$$\begin{aligned}
 \sin 2x + \sin x - \cos x &= 2 \sin x \cos x + \sin x - \cos x \\
 &= 2 \left( \sin x \cos x + \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right) \\
 &= 2 \left( \sin x - \frac{1}{2} \right) \left( \cos x + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } 2 \left( \sin x - \frac{1}{2} \right) \left( \cos x + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

$$\text{すなわち } 2 \left( \sin x - \frac{1}{2} \right) \left( \cos x + \frac{1}{2} \right) > 0$$

$$\text{よって, 連立不等式 } \begin{cases} \sin x > \frac{1}{2} \\ \cos x > -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ または, 連立不等式 } \begin{cases} \sin x < \frac{1}{2} \\ \cos x < -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ の解が求める解である。}$$

$$\text{ゆえに, } \frac{\pi}{6} < x < \frac{2}{3}\pi \text{ または } \frac{5}{6}\pi < x < \frac{4}{3}\pi$$

(2)

与式左辺を変形すると,

$$\begin{aligned}
 \cos 3x - 2 \cos 2x + \cos x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x - 2(-1 + 2 \cos^2 x) + \cos x \\
 &= 4 \cos^3 x - 4 \cos^2 x - 2 \cos x + 2 \\
 &= 4 \cos^2 x (\cos x - 1) - 2(\cos x - 1) \\
 &= 2(\cos x - 1)(2 \cos^2 x - 1)
 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } 2(\cos x - 1)(2 \cos^2 x - 1) = 0 \text{ より, } \cos x = 1, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ゆえに, } x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$$

240

$$\tan x = \alpha, \tan y = \beta \text{ とおくと, } \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}, \alpha + \beta = 1 + \sqrt{3} \text{ より, } \alpha\beta = \sqrt{3}$$

$$\text{よって, } \alpha, \beta \text{ は } t^2 - (1 + \sqrt{3})t + \sqrt{3} = 0 \text{ すなわち } (t - 1)(t - \sqrt{3}) = 0 \text{ の解}$$

$$\text{ゆえに, } (\alpha, \beta) = (1, \sqrt{3}), (\sqrt{3}, 1)$$

$$\text{よって, } (x, y) = \left( \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right), \left( \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4} \right)$$

241

(1)

$$\begin{aligned}
 \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ (\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2 - (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{1}{3} \right)^2 - 1 - 1 \right\} \\
 &= -\frac{59}{72}
 \end{aligned}$$

(2)

解法 1

$$2x = a + b, \quad 2y = a - b \text{ とおくと, } a = x + y, \quad b = x - y$$

また,

$$\begin{aligned}
 \cos 2x + \cos 2y &= \cos(a + b) + \cos(a - b) \\
 &= 2 \cos a \cos b
 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \cos 2x + \cos 2y = 2 \cos(x + y) \cos(x - y)$$

解法 2

$$\begin{aligned}
 \cos 2x + \cos 2y &= -1 + 2 \cos^2 x + (-1 + 2 \cos^2 y) \\
 &= 2(\cos^2 x + \cos^2 y - 1) \\
 2 \cos(x + y) \cos(x - y) &= 2(\cos x \cos y - \sin x \sin y)(\cos x \cos y + \sin x \sin y) \\
 &= 2(\cos^2 x \cos^2 y - \sin^2 x \sin^2 y) \\
 &= 2\{\cos^2 x \cos^2 y - (1 - \cos^2 x)(1 - \cos^2 y)\} \\
 &= 2(\cos^2 x + \cos^2 y - 1)
 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \cos 2x + \cos 2y = 2 \cos(x + y) \cos(x - y)$$

(3)

$$(2) \text{ より, } \cos 2\alpha + \cos 2\beta = 2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}
 \cos 2\alpha + \cos 2\beta &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \\
 &= (\cos \alpha + \cos \beta)^2 - (\sin \alpha + \sin \beta)^2 - 2(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \\
 &= \left( \frac{1}{2} \right)^2 - \left( \frac{1}{3} \right)^2 - 2 \cos(\alpha + \beta) \\
 &= \frac{5}{36} - 2 \cos(\alpha + \beta) \quad \cdots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

$$(1) \text{ より, } \cos(\alpha - \beta) = -\frac{59}{72} \text{ だから, } 2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = -\frac{59}{36} \cos(\alpha + \beta) \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \sim \textcircled{3} \text{ より, } \frac{5}{36} - 2 \cos(\alpha + \beta) = -\frac{59}{36} \cos(\alpha + \beta) \quad \therefore \cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$$

242

(1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \cos^2 x + 2a \sin x + 4a^2 \\
 &= 1 - \sin^2 x + 2a \sin x + 4a^2 \\
 &= -(\sin x - a)^2 + 5a^2 + 1
 \end{aligned}$$

ここで、 $g(\sin x) = -(\sin x - a)^2 + 5a^2 + 1$  とおくと、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$  より、 $0 \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$

よって、

$a < 0$  のとき： $\sin x = 0$  で最大値  $g(0) = 4a^2 + 1$

$0 \leq a \leq \frac{1}{2}$  のとき： $\sin x = a$  で最大値  $g(a) = 5a^2 + 1$

$\frac{1}{2} < a$  のとき： $\sin x = \frac{1}{2}$  で最大値  $g\left(\frac{1}{2}\right) = 4a^2 + a + \frac{3}{4}$

(2)

$a < 0$  のとき

$$a < 0 \text{ かつ } 4a^2 + 1 = 2 \text{ の解は } a = -\frac{1}{2}$$

よって、 $\sin x = 0$  で最大値 2 をとる。ゆえに、 $\tan x = 0$

$0 \leq a \leq \frac{1}{2}$  のとき

$$0 \leq a \leq \frac{1}{2} \text{ かつ } 5a^2 + 1 = 2 \text{ の解は } a = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\begin{aligned}
 \text{よって、} \sin x = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ で最大値 2 をとる。ゆえに、} \tan x &= \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$\frac{1}{2} < a$  のとき

$$4a^2 + a + \frac{3}{4} = 2 \text{ より、} 4a^2 + a - \frac{5}{4} = 0 \quad \therefore a = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{8}$$

$$\text{ところが、} 4 < \sqrt{21} < 5 \text{ より、} \frac{-1 - \sqrt{21}}{8} < \frac{-1 + \sqrt{21}}{8} < \frac{-1 + 5}{8} = \frac{1}{2}$$

よって、 $\frac{1}{2} < a$  かつ  $4a^2 + a + \frac{3}{4} = 2$  を満たす  $a$  は存在しない。

以上より、 $a = -\frac{1}{2}$  のとき  $\tan x = 0$ 、 $a = \frac{\sqrt{5}}{5}$  のとき  $\tan x = \frac{1}{2}$

243

(1)

$$\begin{aligned}
 \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\
 &= 2 \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} \\
 &= 2 \tan \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \\
 &= \frac{2m}{1 + m^2}
 \end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned}
 \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\
 &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} \\
 &= \frac{2 \cdot \frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} \\
 &= \frac{2 \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}}{1 + \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \right)^2} \\
 &= \frac{2m}{1 + m^2}
 \end{aligned}$$

など

$$\begin{aligned}
 \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \\
 &= -1 + 2 \cos^2 \frac{x}{2} \\
 &= -1 + \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \\
 &= -1 + \frac{2}{1 + m^2} \\
 &= \frac{1 - m^2}{1 + m^2}
 \end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned}
 \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \\
 &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} \\
 &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \\
 &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \\
 &= \frac{1 - \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \right)^2}{1 + \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \right)^2} \\
 &= \frac{1 - m^2}{1 + m^2}
 \end{aligned}$$

など

(2)

$$\begin{aligned}
 \sin x + \cos x - \tan \frac{x}{2} &= \frac{2m}{1+m^2} + \frac{1-m^2}{1+m^2} - m \\
 &= \frac{-m^3 - m^2 + m + 1}{1+m^2} \\
 &= \frac{-m^2(1+m) + 1+m}{1+m^2} \\
 &= \frac{(1+m)^2(1-m)}{1+m^2}
 \end{aligned}$$

これと、 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$  より、 $m = \tan \frac{x}{2} < 1$

よって、 $\sin x + \cos x - \tan \frac{x}{2} \leq 0$  すなわち  $\sin x + \cos x \leq \tan \frac{x}{2}$

等号成立は  $\tan \frac{x}{2} = -1$  のとき、すなわち  $x = -\frac{\pi}{2}$  のとき

244

$\tan 1^\circ$  を有理数と仮定すると、 $\tan(n+1)^\circ$  ( $n$  は自然数) は有理数である。・・・①

を数学的帰納法により示す。

(i)  $n=1$  のとき

$\tan(1+1)^\circ = \frac{2 \tan 1^\circ}{1 - \tan^2 1^\circ}$  より、 $\tan(1+1)^\circ$  は有理数である。

(ii)  $n=k$  のとき  $\tan(k+1)^\circ$  が有理数であるとする。

$\tan\{(k+1)+1\}^\circ = \frac{\tan(k+1)^\circ + \tan 1^\circ}{1 - \tan 1^\circ \tan(k+1)^\circ}$  より、 $\tan\{(k+1)+1\}^\circ$  も有理数である。

(i), (ii)より、①が成り立つ。

よって、 $\tan 1^\circ$  を有理数と仮定すると、 $\tan 60^\circ = \tan(59+1)^\circ$  より、 $\tan 60^\circ$  は有理数である。

一方、 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$  である。

$\sqrt{3}$  を有理数と仮定すると、 $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$  ( $p$  と  $q$  は互いに素) と表せる。

この両辺を2乗し、整理すると、 $p^2 = 3q^2$

よって、 $p$  は3の倍数であり、 $p = 3p'$  とおくと、 $(3p')^2 = 3q^2$

すなわち  $q^2 = 3p'^2$  より、 $q$  も3の倍数となる。

これは  $p$  と  $q$  が互いに素であることに反する。

よって、 $\sqrt{3}$  は無理数である。

ゆえに、 $\tan 60^\circ$  は無理数である。

これは、 $\tan 1^\circ$  を有理数と仮定すると  $\tan 60^\circ$  が有理数となることと矛盾し、

この矛盾は  $\tan 1^\circ$  を有理数と仮定したことによる。ゆえに、 $\tan 1^\circ$  は有理数でない。

245

(1)

$$\begin{aligned}
 \cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\
 &= 2 \cos \frac{\pi-C}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\
 &= 2 \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) \cos \frac{A-B}{2} \\
 &= 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\
 &\leq 2 \sin \frac{C}{2}
 \end{aligned}$$

等号成立は  $A=B$  のとき

(2)

$$(1)より, \cos A + \cos B + \cos C \leq 2 \sin \frac{C}{2} + \cos C \quad (\text{等号成立は } A=B \text{ のとき}) \quad \dots \textcircled{1}$$

また, ①の右辺は,

$$\begin{aligned}
 2 \sin \frac{C}{2} + \cos C &= 2 \sin \frac{C}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \\
 &= -2 \left( \sin \frac{C}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

より,  $\sin \frac{C}{2} = \frac{1}{2}$  で最大値  $\frac{3}{2}$  をとる。また,  $0 < \frac{C}{2} < \frac{\pi}{2}$  より, このときの  $C$  は  $\frac{\pi}{3}$  である。よって,  $\cos A + \cos B + \cos C$  は最大となるのは,  $A=B$  かつ  $C = \frac{\pi}{3}$  のとき,すなわち  $A=B=C = \frac{\pi}{3}$  のときである。

246

(1)

 $|\cos x| = \sin x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) の解(i)  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  のとき

$$\sin x = \cos x \text{ すなわち } \sin x - \cos x = 0 \text{ より, } \sqrt{2} \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\text{これと } -\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} \text{ より, } x - \frac{\pi}{4} = 0 \quad \therefore x = \frac{\pi}{4}$$

(ii)  $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$  のとき

$$\sin x = -\cos x \text{ すなわち } \sin x + \cos x = 0 \text{ より, } \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\text{これと } \frac{3}{4}\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi \text{ より, } x + \frac{\pi}{4} = \pi \quad \therefore x = \frac{3}{4}\pi$$

(i), (ii)より,  $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$

$\cos(\cos x)$ ,  $\cos(\sin x)$  の大小

### 解法 1

$$\cos(\cos x) = \cos(-\cos x) \text{ より, } \cos(\cos x) = \cos(|\cos x|)$$

よって,  $\cos(|\cos x|)$  と  $\cos(\sin x)$  の大小を比較すればよい。

$\cos t$  は  $0 \leq t \leq \pi$  において単調に減少するから,  $0 \leq t_1 < t_2 \leq \pi$  ならば  $\cos t_1 > \cos t_2$  である。

これと,  $0 \leq |\cos x| \leq 1 < \pi$ ,  $0 \leq \sin x \leq 1 < \pi$  より,  $|\cos x| < \sin x$  ならば  $\cos(\cos x) > \sin x$ ,

$|\cos x| = \sin x$  ならば  $\cos(\cos x) = \sin x$ ,  $|\cos x| > \sin x$  ならば  $\cos(\cos x) < \sin x$

また,  $|\cos x| = \sin x$  の解は, (1)より,  $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$

$|\cos x| < \sin x$  の解は, (1)で,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  のとき  $\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$  より,  $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$  のとき  $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$  より,  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{4}\pi$  よって,  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$

したがって,  $|\cos x| > \sin x$  の解は  $0 \leq x < \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi < x \leq \pi$

以上より,

$0 \leq x < \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi < x \leq \pi$  のとき  $\cos(\cos x) < \cos(\sin x)$

$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$  のとき  $\cos(\cos x) = \cos(\sin x)$

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$  のとき  $\cos(\cos x) > \cos(\sin x)$

## 解法 2

$$\cos(\cos x) - \cos(\sin x) = 2 \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  の符号は下表のようになる。

| $x$                                                     | 0 | ... | $\frac{\pi}{4}$ | ... | $\frac{3}{4}\pi$ | ... | $\pi$ |
|---------------------------------------------------------|---|-----|-----------------|-----|------------------|-----|-------|
| $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ | + | +   | +               | +   | 0                | -   | -     |
| $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ | - | -   | 0               | +   | +                | +   | +     |

$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  の符号は

$\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ ,  $\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$  の符号とそれぞれ一致するから,

$0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{3}{4}\pi < x \leq \pi$  のとき  $\cos(\cos x) - \cos(\sin x) < 0$  すなわち  $\cos(\cos x) < \cos(\sin x)$

$x = \frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{3}{4}\pi$  のとき  $\cos(\cos x) - \cos(\sin x) = 0$  すなわち  $\cos(\cos x) = \cos(\sin x)$

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$  のとき  $\cos(\cos x) - \cos(\sin x) > 0$  すなわち  $\cos(\cos x) > \cos(\sin x)$

## (2)

$$\cos \alpha > \sin \beta$$

## 解法 1

$$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} - \beta < \frac{\pi}{2} \text{ より, } \cos \alpha > \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin \beta$$

## 解法 2

$\gamma > 0$  を考え,  $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$  とすると,  $0 \leq \alpha < \alpha + \gamma \leq \frac{\pi}{2}$  より,

$$\sin \beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \gamma)\right) = \cos(\alpha + \gamma) < \cos \alpha$$

$$\cos(\cos x) > \sin(\sin x)$$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  のとき

$$\cos x \geq 0, \sin x \geq 0, \cos x + \sin x < \frac{\pi}{2} \text{ より, } \cos(\cos x) > \sin(\sin x)$$

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \text{ のとき}$$

$$-\cos x \geq 0, \sin x \geq 0, -\cos x + \sin x < \frac{\pi}{2} \text{ より, } \cos(-\cos x) > \sin(\sin x)$$

$$\begin{aligned} \text{これと, } \cos(\cos x) &= \cos(-\cos x) \text{ より,} \\ \cos(\cos x) &> \sin(\sin x) \end{aligned}$$

247

(1)

$$\begin{aligned} \cos 5\theta &= \cos(2\theta + 3\theta) \\ &= \cos 2\theta \cos 3\theta - \sin 2\theta \sin 3\theta \\ &= (2\cos^2 \theta - 1)(4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) - 2\sin \theta \cos \theta (-4\sin^3 \theta + 3\sin \theta) \\ &= 8\cos^5 \theta - 10\cos^3 \theta + 3\cos \theta - 2\cos \theta \sin^2 \theta \cos \theta (-4\sin^2 \theta + 3) \\ &= 8\cos^5 \theta - 10\cos^3 \theta + 3\cos \theta - 2\cos \theta (1 - \cos^2 \theta) \{-4(1 - \cos^2 \theta) + 3\} \\ &= 8\cos^5 \theta - 10\cos^3 \theta + 3\cos \theta + 2\cos \theta (\cos^2 \theta - 1)(4\cos^2 \theta - 1) \\ &= 16\cos^5 \theta - 20\cos^3 \theta + 5\cos \theta \end{aligned}$$

よって,  $\cos \theta = x$  とおくことにより,

$$f(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

(2)

解法 1

$$\cos 5\theta = 0 \quad (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ) \text{ とすると, } 5\theta = 90^\circ + 180^\circ k \quad (k \text{ は整数}) \text{ より, } \theta = 18^\circ(2k+1)$$

$$\text{よって, } \alpha = 18^\circ \text{ とすると, } \theta = \alpha, 3\alpha, 5\alpha, 7\alpha, 9\alpha$$

これと,  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  において,  $\cos \theta$  は単調に減少することから,

$$\cos \alpha, \cos 3\alpha, \cos 5\alpha, \cos 7\alpha, \cos 9\alpha \text{ は } 16x^5 - 20x^3 + 5x = 0 \text{ の異なる 5 実数解である。}$$

$$\text{ただし, } 5\alpha = 90^\circ \text{ より, } \cos 5\alpha = 0$$

よって,  $16x^5 - 20x^3 + 5x$  を因数分解すると, 因数定理より,

$$16x(x - \cos \alpha)(x - \cos 3\alpha)(x - \cos 7\alpha)(x - \cos 9\alpha) \text{ となる。}$$

$$x \text{ の係数は 5 だから, } 5 = 16 \cos \alpha \cos 3\alpha \cos 7\alpha \cos 9\alpha$$

$$\therefore \cos \alpha \cos 3\alpha \cos 7\alpha \cos 9\alpha = \frac{5}{16}$$

## 解法 2

$$\begin{aligned}\cos \alpha \cos 3 \alpha \cos 5 \alpha \cos 9 \alpha &= \cos \alpha \cos (5 \alpha - 2 \alpha) \cos (5 \alpha + 2 \alpha) \cos (10 \alpha - \alpha) \\&= \cos \alpha \cos (90^\circ - 2 \alpha) \cos (90^\circ + 2 \alpha) \cos (180^\circ - \alpha) \\&= \cos \alpha \sin 2 \alpha \cdot (-\sin 2 \alpha) \cdot (-\cos \alpha) \\&= \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \\&= \cos^2 \alpha (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 \\&= 4 \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha \\&= 4 \cos^4 \alpha (1 - \cos^2 \alpha) \\&= -4 \cos^6 \alpha + 4 \cos^4 \alpha\end{aligned}$$

また,  $16 \cos^5 \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 5 \cos \alpha = \cos 5 \alpha$ ,  $\cos 5 \alpha = 0$  より,  
 $16 \cos^5 \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 5 \cos \alpha = 0$  すなわち  $\cos \alpha (16 \cos^4 \alpha - 20 \cos^2 \alpha + 5) = 0$   
これと,  $\cos \alpha \neq 0$  より,  $16 \cos^4 \alpha - 20 \cos^2 \alpha + 5 = 0$   
よって,

$$\begin{aligned}\cos \alpha \cos 3 \alpha \cos 5 \alpha \cos 9 \alpha &= -4 \cos^6 \alpha + 4 \cos^4 \alpha \\&= \left( -\frac{1}{4} \cos^2 \alpha - \frac{1}{16} \right) (16 \cos^4 \alpha - 20 \cos^2 \alpha + 5) + \frac{5}{16} \\&= \frac{5}{16}\end{aligned}$$